

## В О П Р О С Ы — Б И Л Е Т Ы

к экзамену по математическому анализу за третий семестр  
для студентов второго курса второго потока

2012-2013 учебный год

Лектор профессор В.А.Зорич

**1.** Критерий Коши сходимости ряда. Теорема сравнения и основные достаточные признаки сходимости (мажорантный, интегральный, Абеля—Дирихле). Ряд  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ .

**2.** Арифметические действия с абсолютно сходящимися рядами и теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда.

**3.** Равномерная сходимость семейств и рядов функций. Критерий Коши и основные достаточные признаки равномерной сходимости ряда функций (мажорантный, Абеля—Дирихле).

**4.** Достаточные условия коммутирования двух предельных переходов. Непрерывность, интегрирование, дифференцирование и предельный переход.

**5.** Область сходимости и характер сходимости степенного ряда. Формула Коши—Адамара. Теорема Абеля (вторая). Тейлоровские разложения основных элементарных функций. Формула Эйлера. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда.

**6.** Несобственный интеграл. Критерий Коши и основные достаточные признаки сходимости (мажорантный, Абеля—Дирихле).

**7.** Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Критерий Коши и основные достаточные признаки равномерной сходимости (мажорантный, Абеля—Дирихле).

**8.** Непрерывность, дифференцирование и интегрирование собственного интеграла, зависящего от параметра.

**9.** Непрерывность, дифференцирование и интегрирование несобственного интеграла, зависящего от параметра. Интеграл Дирихле.

**10.** Эйлеровы интегралы. Области определения, дифференциальные свойства, формулы понижения, различные представления, взаимосвязь. Интеграл Пуассона.

**11.** Дельтаобразные семейства функций. Теорема о сходимости свертки. Классическая теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции алгебраическим многочленом.

**12.** Векторное пространство со скалярным произведением. Непрерывность скалярного произведения и связанные с этим его алгебраические свойства. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Теорема Пифагора. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье. Примеры скалярных произведений и ортогональных систем в пространствах функций.

**13.** Лемма о перпендикуляре. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Пример приложения: метод наименьших квадратов. Неравенство Бесселя и сходимость ряда Фурье. Условия полноты ортонормированной системы.

**14.** Классический (тригонометрический) ряд Фурье в вещественной и комплексной форме. Лемма Римана. Принцип локализации и сходимость ряда Фурье в точке. Пример: разложение  $\cos(\alpha x)$  в ряд Фурье и разложение  $\sin(\pi x)/\pi x$  в бесконечное произведение.

**15.** Гладкость функции, скорость убывания ее коэффициентов Фурье и скорость сходимости ее ряда Фурье.

**16.** Полнота тригонометрической системы и сходимость в среднем тригонометрического ряда Фурье.

**17.** Преобразование Фурье и интеграл Фурье (формула обращения). Пример: вычисление  $\hat{f}$  для  $f(x) := \exp(-a^2 x^2)$ .

**18.** Преобразование Фурье и оператор дифференцирования. Гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье. Равенство Парсеваля. Преобразование Фурье как изометрия пространства быстро убывающих функций.

**19.** Преобразование Фурье и свертка. Решение одномерного уравнения теплопроводности.

**20.** Восстановление переданного сигнала по спектральной функции прибора и принятому сигналу. Теорема отсчетов (формула Котельникова-Шеннона).

**21.** Асимптотическая последовательность и асимптотический ряд. Пример: асимптотическое разложение функции  $Ei(x)$ . Различие между сходящимися и асимптотическими рядами. Лемма Ватсона.

**22.** Асимптотика интеграла Лапласа (главный член). Формула Стирлинга.